انواع المعادلات التفاضلية: تقسم المعادلات التفاضلية الى نوعين

١- المعادلات التفاضلية الاعتيادية

Ordinary Differential Equation (O.D.E)

٢- المعادلات التفاضلية الجزئية   Partial diff equ

المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغير مستقل وليكن (x) ودالة غير المعروفة (y) وبعض مشتقات y بالنسبة الى (x) ويرمز لها O.D.E

Examples

1) $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$

2) $x^2 y'' + 5x y' - x^3 y = 0$

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$

4) $y' + x^2 y + x = y$

5) $(y'')^3 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

6) $y^{(4)} + \cos y + x^2 y y' = 0$

كل المعادلات اعلاه هي معادلات تفاضلية اعتيادية لان المتغير (y) يعتمد فقط على المتغير (x)

رتبة المعادلة التفاضلية (order) تعرف رتبة المعادلة التفاضلية بأنها رتبة اعلى مشتقة .

درجة المعادلة التفاضلية (degree) تعرف درجة المعادلة التفاضلية بانها أكبر قوة (اس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة

Examples

1) $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ رتبة اولى درجة اولى

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ رتبة ثانية درجة اولى

3) $(y''')^3 + y' - y = 0$ رتبة ثالثة درجة ثالثة

4) $y'' + 2y\,(y')^3 = 0$ رتبة ثانية درجة اولى

5) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x^3 - 5$ رتبة اولى درجة رابعة

6) $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ رتبة 3 درجة 2

7) $y^{(4)} + \cos y + x^2 y y' = 0$ رتبة رابعة درجة اولى

المعادلات التفاضلية الخطية Linear O.D.E_s

أية معادلة تفاضلية مهما كانت رتبتها تكون خطية اذا كان المتغير المعتمد فيها وجميع المشتقات التي تظهر فيها من الدرجة الاولى وغير مضروبة ببعضها وتكون صيغتها العامة هي

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad —— (1)$$

حيث المعاملات $a_0, a_1, \ldots, a_n$ وكذلك $f(x)$ دوال معرفة بـ x ضمن فترة معينة مثل $a \le x \le b$ اذا كانت $f(x) = 0$ لكل $a \le x \le b$ فإن

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

تسمى المعادلة (2) معادلة تفاضلية خطية متجانسة
اما اذا كانت المعاملات $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت تسمى (2) معادلة تفاضلية خطية ذات المعاملات الثابتة.

متغير معتمد

$$\frac{dy}{dx}$$

متغير مستقل

شروط المعادلة الخطية

١ اذا كانت المشتقات من الدرجة الاولى وكذلك المتغير المعتمد y من الدرجة الاولى فأن المعادلة خطية.
٢ - اذا كانا المتغير المعتمد مضروب في المشتقات فأن المعادلة غير خطية

$y \frac{dy}{dx}$ } غير خطية

اذا كان المتغير المعتمد y من درجة y'^2 او y'^3 تكون المعادلة غير خطية

التاريخ: / /

الموضوع:

Examples

1) $y\frac{dy}{dx} - y = 0$ non-linear

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 8x^2 = 0$ linear

3) $x^2 y'' + xy' + x^2 y = e^x \sin x$ linear

4) $y y'' + y' = x$ non-linear

5) $y' + x\sqrt{y} = \sin x$ non-linear (1 ≠ الاس)

6) $y''' + x^2 y'' + \sin y = 0$ non-linear

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n

$$P_n(x)\, y^{(n)} + P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)\, y' + P_0(x)\, y = Q(x)$$

* حيث المتغير التابع y وجميع مشتقاته مرفوع للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة بينهما و والدوال المعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x

$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0$ خطية متجانسة من الرتبة 2

$x y' + (\sin x) y = x^2 (\sin x + 2)$ خطية غير متجانسة من الرتبة الاولى. المستقل اصنع

الموضوع : التاريخ: / /

س/ بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الاتية وكذلك بين هل ان المعادلات خطية او غير خطية

1) $(x^2 - y^2) + 3xy \frac{dy}{dx} = 0$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 5y = 7$

3) $(y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + \cos x$

4) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 0$

انتهى
الى هنا المحاضرة الاولى

Solution of an ordinary differential equation

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو أية علاقة بين not

متغيرات المعادلة التفاضلية . بحيث أن هذه العلاقة

١) خالية من المشتقة

٢) معرفة على فترة معينة

٣) تحقق المعادلة التفاضلية

مثال // بين أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$ —— (1)

Solution

$$y = x^2 + 3x \Rightarrow y' = 2x + 3$$

نعوض قيمة y' في المعادلة التفاضلية (1)

$$xy' = x^2 + y \Rightarrow x(2x+3) = x^2 + (x^2 + 3x)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = x^2 + x^2 + 3x \Rightarrow 2x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$$

$\therefore$ $y = x^2 + 3x$ حل للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

الموضوع :   التاريخ: /   /

الحل العام General Solution

هو حل يشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوٍ لرتبة المعادلة التفاضلية.

مثلاً :- اذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى يجب ان يكون حلها مشتملاً على ثابت اختياري واحد وهو ثابت التكامل الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الاولى.

* اما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب ان يشتمل حلها على ثابتي تكامل نظراً لاجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة من الرتبة الثانية وهذا

مثال // اثبت ان

$y = x\ln x - x$ هو احد حلول المعادلة

$$x\frac{dy}{dx} = x + y \quad , \quad x > 0 \quad \ldots (1)$$

Solution :-

$$y = x\ln x - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \cdot (1) - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x \quad (1) \text{ نعوض في}$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = x + y \Rightarrow$$

$$x\ln x = x + x\ln x - x$$

$$\Rightarrow x\ln x = x\ln x$$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

$\therefore$ $y = x\ln x - x$ هو احد حلول المعادلة (1)

صنع المستقبل

التاريخ: / /   الموضوع:

مثال :- بين ان $\ln y^2 = x + a$ ، $a \in R$ حل للمعادلة
$2y' - y = 0$ ~~~ (1)

Solution (واجب)

$\ln y^2 = x + a \Rightarrow 2\ln y = x + a \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = 1$

$\Rightarrow \frac{2y'}{y} = 1 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$

∴ $\ln y^2 = x + a$ هو احد حلول المعادلة التفاضلية (1)

مثال // هل ان $y = x^3 + x - 2$ حل للمعادلة
$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ - - - - (1)

Solution

$y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

∴ $y = x^3 + x - 2$ هو حل للمعادلة التفاضلية
$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$.

الموضوع : التاريخ: / /

مثال :- برهن على ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{---- (1)}$$

Solution

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \Rightarrow$$

$$y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x \Rightarrow$$

$$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x \Rightarrow$$ نعوضها في (1)

$$-12\cos 2x - 8\sin 2x + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$$

$$= \cancel{-12\cos 2x} - \cancel{8\sin 2x} + \cancel{12\cos 2x} + \cancel{8\sin 2x} = 0$$

$\therefore$ $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلاً للمعادلة التفاضلية (1)

مثال ١: برهن على ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$

Solution

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \Rightarrow$$

$$y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x \Rightarrow$$

$$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x \Rightarrow$$ نعوضها في (1)

$$-12\cos 2x - 8\sin 2x + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$$

$$= \cancel{-12\cos 2x} - \cancel{8\sin 2x} + \cancel{12\cos 2x} + \cancel{8\sin 2x} = 0$$

∴ $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلاً للمعادلة التفاضلية (1)

مثال // هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حل للمعادلة

$$y\,y'' + (y')^2 - 3x = 5 \quad \text{---}(1)$$

Solution

$$y^2 = 3x^2 + x^3 \Rightarrow 2y\,y' = 6x + 3x^2$$

$$\Rightarrow 2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x \;\}\div 2$$

$$y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$$

$\therefore$ $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليست حلا للمعادلة التفاضلية (1)

مثال بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلا

للمعادلة التفاضلية (1)--- $y'' + y' - 6y = 0$

Solution

$$y = e^{2x} + e^{-3x}$$

$$\Rightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$$

$$y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

نعوض في (1)

$$4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x})$$

$$\Rightarrow 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0$$

مثال // هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حل للمعادلة

$$y y'' + (y')^2 - 3x = 5 \quad \text{---}(1)$$

Solution

$$y^2 = 3x^2 + x^3 \Rightarrow 2yy' = 6x + 3x^2$$

$$\Rightarrow 2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x \quad \Big\} \div 2$$

$$y y'' + (y')^2 - 3x = 3$$

$\therefore$ $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليست حلاً للمعادلة التفاضلية (1)

مثال بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y' - 6y = 0 \quad \text{---}(1)$$

Solution

$$y = e^{2x} + e^{-3x}$$

$$\Rightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$$

$$y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$ نعوض في (1)

$$4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x})$$

$$\Rightarrow \underline{4e^{2x}} + 9e^{-3x} + \underline{2e^{2x}} - 3e^{-3x} - \underline{6e^{2x}} - 6e^{-3x} = 0$$

مثال // هل ان $y^3 y'' = -2$ حلاً للمعادلة $2x^2 + y^2 = 1$

Solution

$2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 4x + 2yy' = 0 \div 2 \Rightarrow$

$2x + yy' = 0$ —— ⊗

$\Rightarrow yy' = -2x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y}$ —— (1)

⊗ نشتق

$2 + yy'' + y'y' = 0 \Rightarrow 2 + yy'' + (y')^2 = 0$ —— (2)

نعوض (1) في (2)

$2 + yy'' + \left(\frac{-2x}{y}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow 2 + yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = 0$ نضرب $\times y^2$

$2y^2 + y^3 y'' + 4x^2 = 0 \Rightarrow y^3 y'' = -4x^2 - 2y^2 \Rightarrow$

$y^3 y'' = -2(2x^2 + y^2)$

بما ان $2x^2 + y^2 = 1$

الموضوع :   التاريخ: / /

$\therefore y''' y'' = -2(1) \Rightarrow y''' y'' = -2$

$y''' y'' = -2$ حل للمعادلة $2x^2 + y^2 = 1$ $\therefore$

مثال // هل ان $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة

$x y'' + 2y' + 25 yx = 0$

Solution

$yx = \sin 5x \Rightarrow y(1) + x y' = 5\cos 5x$

$\therefore y + x y' = 5\cos 5x \xrightarrow{\text{نشتق}} y' + x y'' + y'(1) =$

$-25 \sin 5x \Rightarrow$

$2y' + x y'' + 25 \sin 5x = 0$

$\because yx = \sin 5x$

$\therefore x y'' + 2y' + 25 yx = 0$

$\therefore$ $yx = \sin 5x$ حل للمعادلة

$x y'' + 2y' + 25 yx = 0$

اصنع المستقبل

الحل الخاص Particular Solution هو اي حل يحقق المعادلة التفاضلية، لا يشتمل على اي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه احياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة.

مثال // اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

Find the differential equation from the general solution

$$y = c\sin x \quad \text{---- (1)}$$

الحل

نفاضل مرة واحدة

$$y' = c\cos x \quad \text{---- (2)}$$

نحذف c من المعادلتين (2) و (1) بقسمة (2) على (1)

وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة

$$y' = y\cot x$$

توضيح

$$y = c\sin x \quad \text{---- (1)}$$

$$y' = c\cos x \quad \text{---- (2)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cancel{c}\cos x}{\cancel{c}\sin x} = \cot x \Rightarrow y' = y\cot x$$

حل اخر

$$\begin{vmatrix} y & \sin x \\ y' & \cos x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y\cos x - y'\sin x \Rightarrow y\cos x = y'\sin x$$

$$\therefore y' = \frac{y\cos x}{\sin x} \rightarrow y' = y\cot x$$

مثال// اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو

Ex/ find the differential eluation from the general solution.

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad ---(1)$$

الحل// بتفاضل المعادلة (1) مرتين

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} \quad ---(2)$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x} \quad ---(3)$$

لحذف c_1 و c_2

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{3x} \\ y' & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ y'' & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$18y + 3y'' + 4y' - 2y'' - 12y - 9y' = 0$$

$$y(18-12) + y''(3-2) + y'(4-9) = 0$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

مثال // جد الحل الخاص للمعادلة (يعطى بعد التعريف مباشرة)

$$y = A\sin 2x + B\cos 2x$$

حيث $A=1, B=-2$

$$y = \sin 2x - 2\cos 2x$$

اصبح حل خاص لانه ناتج من تعويض قيم الثوابت الاختيارية.

مثال // جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y'' = 6x + 2$$

مع الشروط الحدودية $y(0)=2$, $y(2) = 8$

الحل بتكامل طرفي المعادلة مرتين بالنسبة الى x نجد ان

$$y' = 6\frac{x^2}{2} + 2x + A$$

$$y = 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + Ax + B$$

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

من الشرط الاول نجد B ومن الشرط (2) نجد A

$$y(0) = 2 \Rightarrow B = 2$$

$$y(2) = 8$$

$$\Rightarrow y = 8 + 4 + 2A + 2 = 8$$

$$12 + 2 + 2A = 8 \Rightarrow 14 - 8 + 2A = 0$$

$$6 = -2A \Rightarrow A = -3$$

الحل الخاص: $y = x^3 + x^2 - 3x + 2$

معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

(تعريف)

اي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تكون على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم احدى الطرق التالية

١- طريقة فصل المتغيرات Separation of variables

في هذا النوع من المعادلات نستطيع ان نعزل الحدود التي تحتوي على متغير x مع dx في طرف والحدود التي تحتوي y مع dy في طرف ثاني فنحصل

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$$

Example (1)
Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

Solution

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \Rightarrow dy = (2x+5)\,dx \Rightarrow$$

الموضوع :   التاريخ: /   /

Example

Solve the diff equ

$dy = \sin x \cos^2 y \, dx$

$\therefore y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \cos y \neq 0$

Solution

$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x \, dx \Rightarrow$

$\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int \sin x \, dx \Rightarrow$

$\int \sec^2 y \, dy = \int \sin x \, dx \Rightarrow$

$\tan y = -\cos x + c$

Example

Solve the differential equation

$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ where $y=0$ عند $x=0$

Solution

$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \Rightarrow dy = e^{2x} \cdot e^{y}\, dx \div e^{y} \Rightarrow$

$\frac{dy}{e^{y}} = e^{2x}\, dx \Rightarrow e^{-y}\, dy = e^{2x}\, dx \Rightarrow$

$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c \quad \because x=0,\ y=0$

$\Rightarrow -e^{0} = \frac{1}{2} e^{0} + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c$

$\Rightarrow c = -1 - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{-3}{2}$

$\therefore \Rightarrow -e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{-1}{e^{y}} = \frac{e^{2x} - 3}{2} \times (-1)$

$\Rightarrow \frac{1}{e^{y}} \times \frac{3 - e^{2x}}{2} \Rightarrow e^{y}(3 - e^{2x}) = 2 \Rightarrow$

$e^{y} = \frac{2}{3 - e^{2x}}$ نأخذ ln للطرفين

Example / Solve the diff eq

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad , \quad x = 1 \;,\; y = 2$$

Solution

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy$$

$$dy = x(3-y)\,dx \qquad \div (3-y)$$

$$-\int \frac{dy}{3-y} = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$-\ln|3-2| = \frac{1}{2}(1)^2 + c$$

$$\Rightarrow -\ln 1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \qquad \times(-1)$$

$$\ln|3-y| = \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{2}$$ نأخذ e

$$3 - y = e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow -y = e^{\frac{1}{2}(-x^2+1)} - 3 \quad] \times -1$$

$$y = 3 - e^{+\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

Example 1) Solve the differential equation

$$\acute{y} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

Solution/

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

بقسمة الطرف الايمن على اعلى اس وهو x^2

Suppose $v = \frac{y}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \quad \text{---- (1)}$$

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{---- (2)}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v$$ توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$x \, 2v \, dv = (v^2 - 1)\, dx \; \} \div x(v^2 - 1)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2v\, dv}{v^2 - 1}$$ بأخذ التكامل

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v}{v^2 - 1}\, dv \Rightarrow \ln|x| = \ln|v^2 - 1| + \ln c$$

$$\ln|x| = \ln|c(v^2 - 1)|$$ بأخذ e

$$\Rightarrow x = \pm c(v^2 - 1) \;\therefore\; x = \pm c\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right) = \pm c\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)$$

$$= \pm c\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2}\right)$$

Example

Solve the differential equation

$(3x - y)\, y' = x + y$

Solution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{y}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{3 - \frac{y}{x}} \qquad \text{let } v = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \quad \text{———} \; 1$$

$$\text{let } y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{———} \; 2$$

نعوض 2 في 1

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v - v(3-v)}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v+v^2}{3-v}$$